Spin-½-System

Claude Krantz

Übung Physik IV
10.05.2012

Quantenmechanischer Drehimpuls $\vec{J}$:

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} J_k \qquad (1)$$

Dies ist die einzige Anforderung!

Alle Vektoroperatoren, die (1) erfüllen sind q.m. Drehimpulse.

Aus (1) folgt

$$[J_i, J^2] = 0$$

Eigenwertgleichungen

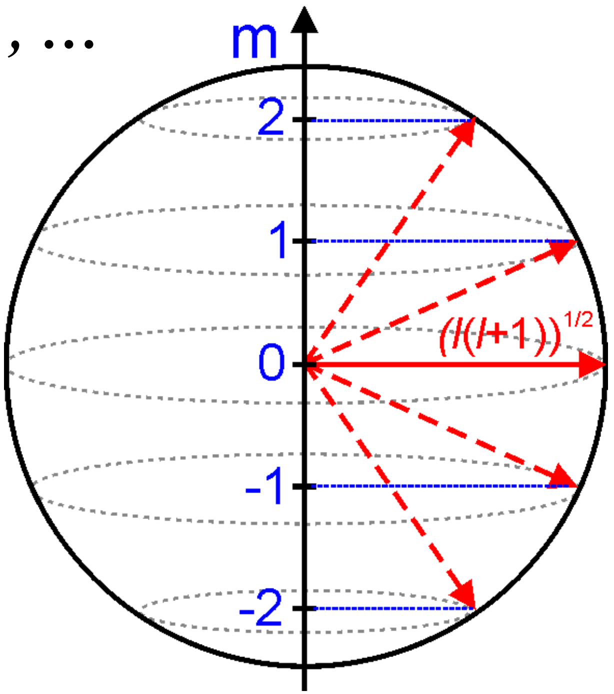
$$J^2|\psi_{jm}\rangle = \hbar^2 j(j+1)|\psi_{jm}\rangle$$
$$J_i|\psi_{jm}\rangle = \hbar\, m|\psi_{jm}\rangle$$

mit

$$j = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{oder} \qquad j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$$

und

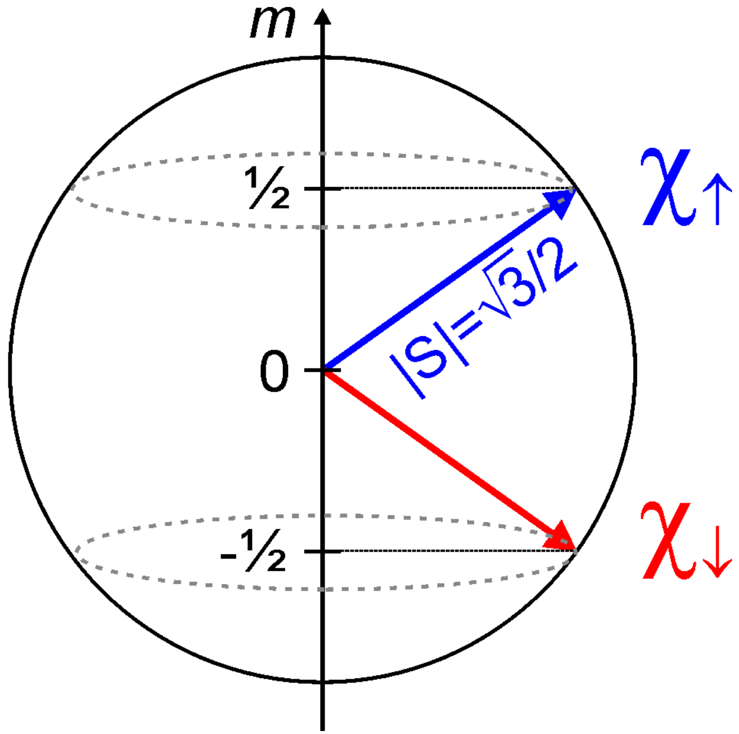
$$m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$$



Elektronenspin $\vec{S}$ …

… ist ein q.m. Drehimpuls.

Mit $\quad j = s = \frac{1}{2} \quad$ und $\quad m = m_s = \pm\frac{1}{2}$



Elektronenspin $\vec{S}$ …

… ist ein q.m. Drehimpuls.

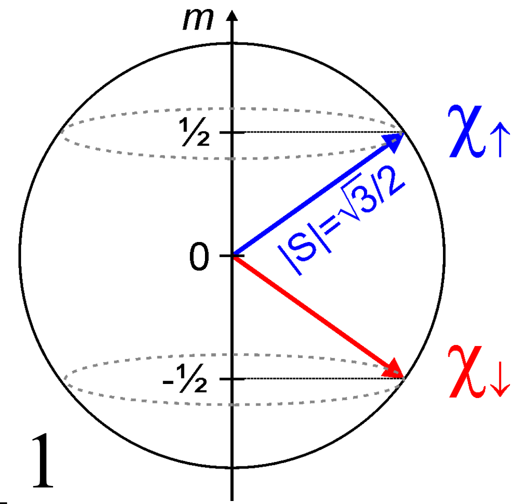
Mit $j = s = \frac{1}{2}$ und $m = m_s = \pm\frac{1}{2}$

E.w.-Gleichungen:

$$S^2 |\psi\rangle = \hbar^2 s(s+1) |\psi\rangle = \frac{3\hbar^2}{4} |\psi\rangle$$

$$S_i |\psi\rangle = \hbar\, m_s |\psi\rangle = \pm\frac{\hbar}{2} |\psi\rangle$$

Elektronenspin $\vec{S}$ …



… ist ein q.m. Drehimpuls.

Mit $j = s = \frac{1}{2}$ und $m = m_s = \pm\frac{1}{2}$

E.w.-Gleichungen: $$S^2|\psi\rangle = \hbar^2 s(s+1)|\psi\rangle = \frac{3\hbar^2}{4}|\psi\rangle$$

$$S_i|\psi\rangle = \hbar\, m_s|\psi\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\psi\rangle$$

→ “2-Zustands-System”

Zwei-Zustands-System:

Alle Zustände leben in 2-dimensionalem Hilbertraum.

Sei $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ eine beliebige Basis.

Jeder Spin-Zustand kann durch einen Spinor in $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ dargestellt werden:

$$|\psi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle = (|1\rangle |2\rangle)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Matrixdarstellung von S_i:

$$\langle S_i \rangle = \langle \psi | S_i | \psi \rangle = \left(\bar{a} \langle 1 | + \bar{b} \langle 2 | \right) S_i \left(a | 1 \rangle + b | 2 \rangle \right)$$

$$= \left(\bar{a} \langle 1 | + \bar{b} \langle 2 | \right) \left(S_i a | 1 \rangle + S_i b | 2 \rangle \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle 1 | S_i | 1 \rangle & \langle 1 | S_i | 2 \rangle \\ \langle 2 | S_i | 1 \rangle & \langle 2 | S_i | 2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Matrixdarstellung von S_i:

$$\langle S_i \rangle = \langle \psi | S_i | \psi \rangle = \left(\bar{a} \langle 1| + \bar{b} \langle 2| \right) S_i \left(a |1\rangle + b |2\rangle \right)$$

$$= \left(\bar{a} \langle 1| + \bar{b} \langle 2| \right) \left(S_i a |1\rangle + S_i b |2\rangle \right)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{pmatrix}}_{\text{Spinor*}} \underbrace{\begin{pmatrix} \langle 1|S_i|1\rangle & \langle 1|S_i|2\rangle \\ \langle 2|S_i|1\rangle & \langle 2|S_i|2\rangle \end{pmatrix}}_{\text{Matrixdarstellung von } S_i} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\text{Spinor}}$$

in der Basis $\{|1\rangle, |2\rangle\}$

“Diagonalisierung”:

Wegen $[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} J_k$ (1)

kann man $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ so wählen dass sie E.z. zu **einer** Spin-Komponente S_i sind.

“Traditionell” wählt man S_z als ausgezeichnete Spinkomponente:

$$S_z|\uparrow\rangle = +\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle \qquad |\uparrow\rangle \equiv \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$S_z|\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle \qquad |\downarrow\rangle \equiv \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

“Diagonalisierung”:

Damit wird die Matrixdarstellung von S_z

$$S_i \quad \{|1\rangle, |2\rangle\}$$

$$S_i \equiv \begin{pmatrix} \langle 1|S_i|1\rangle & \langle 1|S_i|2\rangle \\ \langle 2|S_i|1\rangle & \langle 2|S_i|2\rangle \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow$$

$$S_z \quad \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$$

$$S_z \equiv \begin{pmatrix} \langle \uparrow|S_z|\uparrow\rangle & \langle \uparrow|S_z|\downarrow\rangle \\ \langle \downarrow|S_z|\uparrow\rangle & \langle \downarrow|S_z|\downarrow\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

"Diagonalisierung":

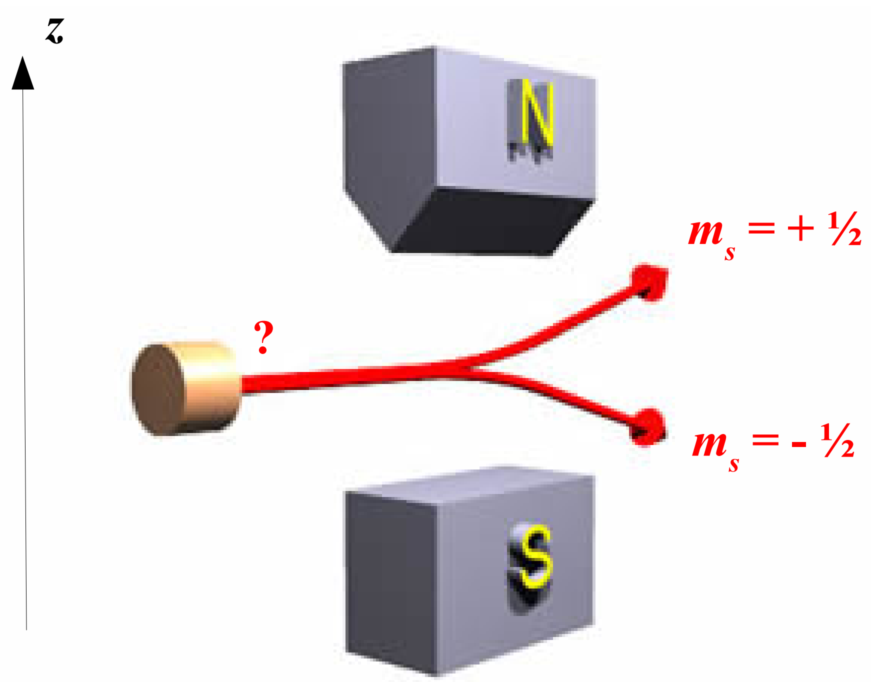
Wegen $[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$ sind die übrigen Spinmatrizen in der Basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ (E.z. zu S_z) off-diagonal:

$$S_x \equiv \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad S_y \equiv \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \qquad S_z \equiv \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Stern-Gerlach-Versuch:

Unpolarisierter Atomstrahl (mit $S = ½$)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right)$$

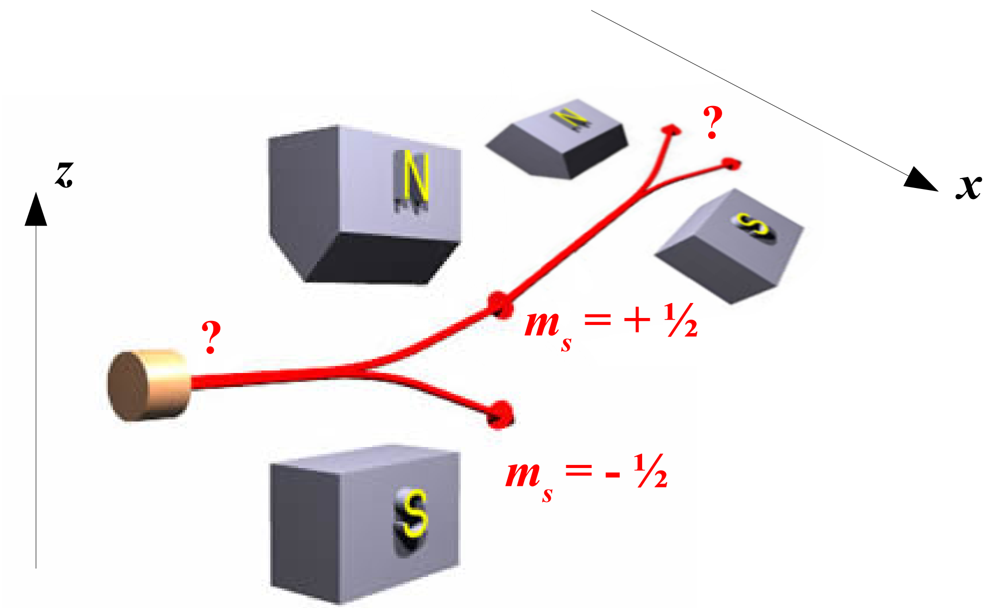


Wahrscheinlichkeit für Spin in z-Richtung:

$$|\langle\uparrow|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

Erweiterter Stern-Gerlach-Versuch:

Selektiere Atomstrahl mit $m_s = +½$ bezüglich z-Richtung ($|\uparrow\rangle$).
Weiterer St.-G.-Apparat in x-Richtung.



(s. Aufgabe 2c) E.z. zu S_x in Basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$:

$$|\chi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle\right)$$

Wahrscheinlichkeit für Spin in x-Richtung:

$$\left|\langle\chi_+|\uparrow\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}$$