

Spin- $\frac{1}{2}$ -System

Claude Krantz

Übung Physik IV
10.05.2012

Quantenmechanischer Drehimpuls \vec{J} :

$$[J_i, J_j] = i \hbar \epsilon_{ijk} J_k \quad (1)$$

Dies ist die **einzigste Anforderung!**

Alle Vektoroperatoren, die (1) erfüllen sind q.m. Drehimpulse.

Aus (1) folgt

$$[J_i, J^2] = 0$$

Eigenwertgleichungen

$$J^2 |\psi_{jm}\rangle = \hbar^2 j(j+1) |\psi_{jm}\rangle$$

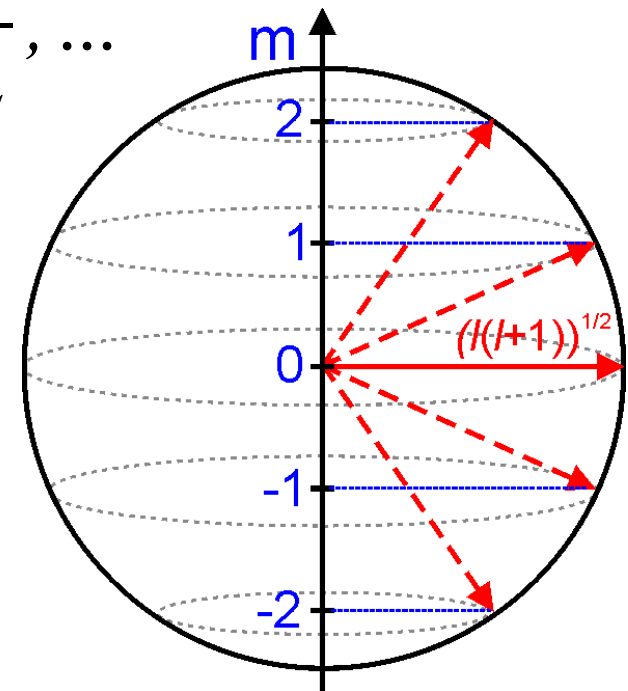
$$J_i |\psi_{jm}\rangle = \hbar m |\psi_{jm}\rangle$$

mit

$$j = 0, 1, 2, \dots \quad \text{oder} \quad j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$$

und

$$m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$$

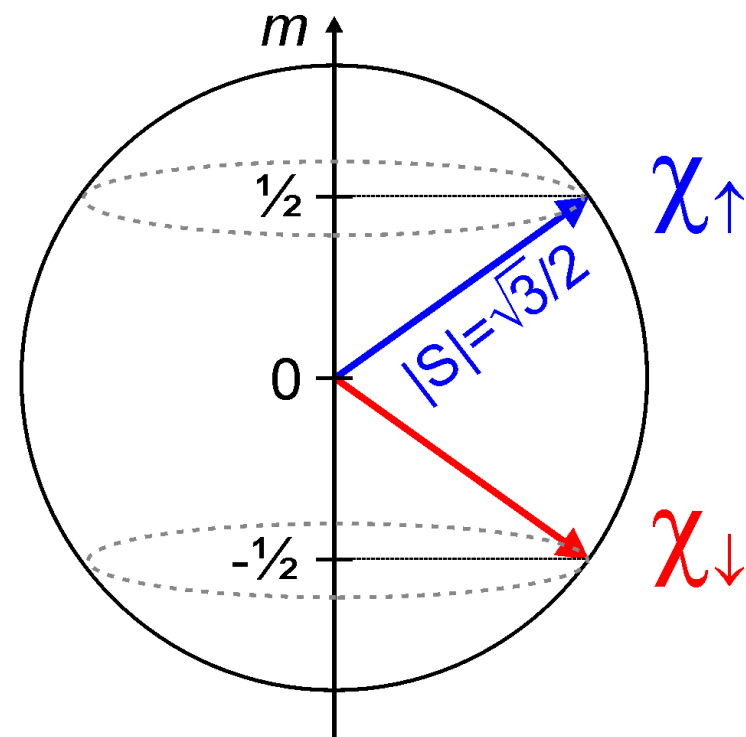


Elektronenspin \vec{S} ...

... ist ein q.m. Drehimpuls.

Mit $j = s = \frac{1}{2}$ und

$$m = m_s = \pm \frac{1}{2}$$



Elektronenspin \vec{S} ...

... ist ein q.m. Drehimpuls.

Mit $j = s = \frac{1}{2}$ und $m = m_s = \pm \frac{1}{2}$

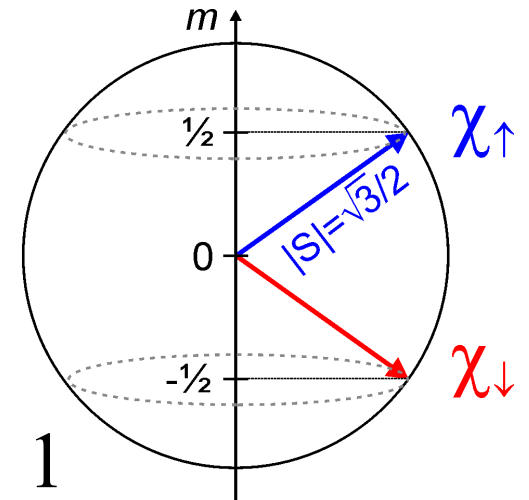
E.w.-Gleichungen: $S^2 |\psi\rangle = \hbar^2 s(s+1) |\psi\rangle = \frac{3\hbar^2}{4} |\psi\rangle$

$$S_i |\psi\rangle = \hbar m_s |\psi\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |\psi\rangle$$

Elektronenspin \vec{S} ...

... ist ein q.m. Drehimpuls.

Mit $j = s = \frac{1}{2}$ und $m = m_s = \pm \frac{1}{2}$



E.w.-Gleichungen: $S^2 |\psi\rangle = \hbar^2 s(s+1) |\psi\rangle = \frac{3\hbar^2}{4} |\psi\rangle$

$$S_i |\psi\rangle = \hbar m_s |\psi\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |\psi\rangle$$

→ “2-Niveau-System”

Zwei-Niveau-System:

Alle Zustände leben in 2-dimensionalem Hilbertraum.

Sei $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ eine beliebige Basis.

Jeder Spin-Zustand kann durch einen Spinor in $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ dargestellt werden:

$$|\psi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle = (|1\rangle|2\rangle) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow |\psi\rangle \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Matrixdarstellung von S_i :

$$\begin{aligned}\langle S_i \rangle &= \langle \psi | S_i | \psi \rangle = (\bar{a} \langle 1 | + \bar{b} \langle 2 |) S_i (a | 1 \rangle + b | 2 \rangle) \\ &= (\bar{a} \langle 1 | + \bar{b} \langle 2 |) (S_i a | 1 \rangle + S_i b | 2 \rangle) \\ &= (\bar{a} \quad \bar{b}) \begin{pmatrix} \langle 1 | S_i | 1 \rangle & \langle 1 | S_i | 2 \rangle \\ \langle 2 | S_i | 1 \rangle & \langle 2 | S_i | 2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Matrixdarstellung von S_i :

$$\begin{aligned}
 \langle S_i \rangle &= \langle \psi | S_i | \psi \rangle = (\bar{a} \langle 1 | + \bar{b} \langle 2 |) S_i (a | 1 \rangle + b | 2 \rangle) \\
 &= (\bar{a} \langle 1 | + \bar{b} \langle 2 |) (S_i a | 1 \rangle + S_i b | 2 \rangle) \\
 &= \underbrace{(\bar{a} \quad \bar{b})}_{\text{Spinor}^*} \underbrace{\begin{pmatrix} \langle 1 | S_i | 1 \rangle & \langle 1 | S_i | 2 \rangle \\ \langle 2 | S_i | 1 \rangle & \langle 2 | S_i | 2 \rangle \end{pmatrix}}_{\text{Matrixdarstellung von } S_i} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\text{Spinor}} \\
 &\quad \text{in der Basis } \{|1\rangle, |2\rangle\}
 \end{aligned}$$

“Diagonalisierung”:

$$\text{Wegen } [J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k \quad (1)$$

kann man $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ so wählen dass sie E.z. zu einer Spin-Komponente S_i sind.


“Traditionell” wählt man S_z als **ausgezeichnete**

Spinkomponente:

$$\begin{aligned} S_z |\uparrow\rangle &= +\frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle & |\uparrow\rangle &\equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ S_z |\downarrow\rangle &= -\frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle & |\downarrow\rangle &\equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

“Diagonalisierung”:

Damit wird die Matrixdarstellung von S_z


$$S_i \quad \{|1\rangle, |2\rangle\}$$
$$S_i \equiv \begin{pmatrix} \langle 1|S_i|1\rangle & \langle 1|S_i|2\rangle \\ \langle 2|S_i|1\rangle & \langle 2|S_i|2\rangle \end{pmatrix}$$
$$S_z \quad \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$$
$$S_z \equiv \begin{pmatrix} \langle \uparrow|S_z|\uparrow\rangle & \langle \uparrow|S_z|\downarrow\rangle \\ \langle \downarrow|S_z|\uparrow\rangle & \langle \downarrow|S_z|\downarrow\rangle \end{pmatrix}$$
$$= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

“Diagonalisierung”:

Wegen $[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$ sind die **übrigen** Spinmatrizen in der Basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ (E.z. zu S_z) **off-diagonal**:

$$S_x \equiv \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y \equiv \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_z \equiv \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

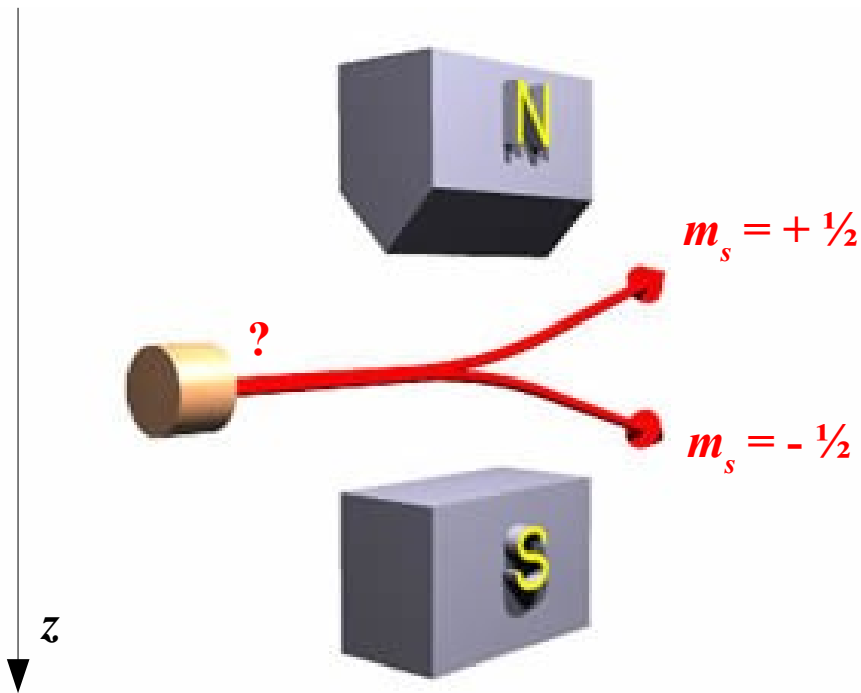
Stern-Gerlach-Versuch:

Unpolarisierter Atomstrahl (mit $S = 1/2$)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$

Wahrscheinlichkeit für Spin
in z-Richtung:

$$|\langle \uparrow | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$



Erweiterter Stern-Gerlach-Versuch:

Selektiere Atomstrahl mit $m_s = +1/2$ bezüglich z -Richtung ($|\uparrow\rangle$).
Weiterer St.-G.-Apparat in x -Richtung.

(Blatt 2:) E.z. zu S_x
in Basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$:

$$|\chi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle)$$

Wahrscheinlichkeit für Spin
in x -Richtung:

$$|\langle \chi_+ | \uparrow \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

