Einführung in die Quantenphysik

- Wir haben gesehen: Licht ist eine Welle
  ↳ folgt aus Maxwell-Gleichungen:

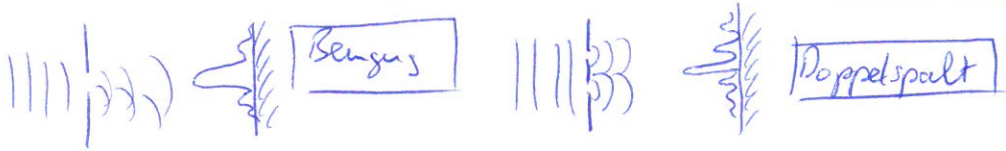
Im Ladungsfreien Raum: $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B}$ Ind.-Gesetz

$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\vec{\nabla}\times\partial_t\vec{B}$

$\Leftrightarrow \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\vec{E}}_{(\text{Gauß})\ =\rho/\varepsilon_0=0}) - \Delta\vec{E} = -\partial_t(\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{B}}_{(\text{Ampère})\ =\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\partial_t\vec{E},\ \mu_0\vec{j}=0}) \Leftrightarrow \boxed{\partial_t^2 E - \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\Delta E = 0}$

$\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} = c^2$ ↳ $\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}}$

- Daraus haben wir gesehen: führt zu Interferenz-Effekten



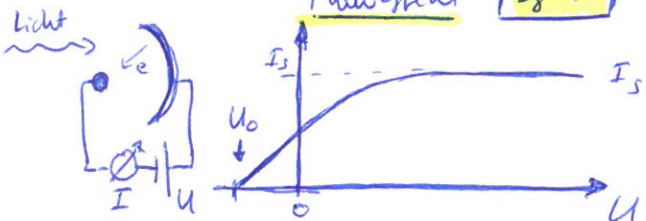
19. Jhd.:
Zeitalter der klassischen Feldtheorie
(auch wenn immer mechanistisch unterlegt)

- Ende 19., Beginn 20. Jahrhundert: Die klassische Physik (Mechanik + E-dynamik) scheitert zunehmend an neuentdeckten Phänomänen:

(A) Licht hat Teilcheneigenschaften

(photon)

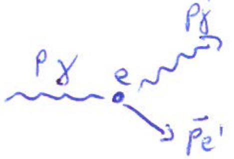
Nicht der erste (Planck) aber
- Vielleicht wichtigster Hinweis:
  Photoeffekt $\boxed{E_\gamma = h\nu}$



I_s hängt von Lichtintensität ab
U_0 hängt nur von Frequenz und Material ab.

→ $\boxed{E_e = h\nu - W}$

- Compton-Streuung



Behandlung als inelastischer Stoß gibt korrektes Ergebnis:

$\boxed{p_\gamma = \frac{h}{\lambda}}$

$\boxed{\lambda' = \lambda + \lambda_c(1-\cos\Theta)}$; $\lambda_c = \overbrace{\frac{h}{m_e c}}^{\text{nat. Konst.!}}$

Vrlsg: PMT

(B) Materie besteht aus Teilchen

Atome (1905 Einstein Brownsche Bewegung),
Elektronen (1897 J. Thomson)

- Und diese haben Welleneigenschaften!

Elektron/Neutron durch Kristallgitter

- Materieteilchen verhalten sich wie Licht

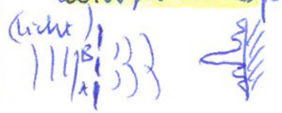
De Broglie-Hypothese: verwende die Beziehungen von Photon (Lichtteilchen) für alle Teilchen: (1924, Doktorarbeit!)

$\boxed{E = h\nu = \hbar\omega \quad ; \quad p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k}$

Achtung: $E(p)$ nicht definiert! $\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} = \frac{p^2}{2m\hbar}$ (V.S.) $\omega(k) = kc$

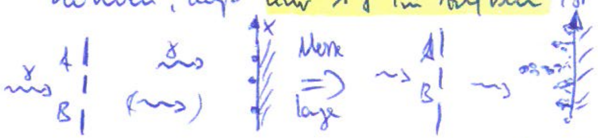
(C) Sehr wichtig: Der Wellencharakter von Teilchen ist Probabilistischer Natur!

Interferenzexperiment:



klassisch: "Teile" der Wellenintensität gehen durch A bzw. B. E/B Felder interferieren am Det.

Nun wissen wir aber: Licht sind Photonen $E = h\nu$. Durch Drosseln der Leistung des Lasers muss ich erreichen können, dass nur 1γ im Aufbau ist



Der Verlauf der Intensität $I(x) = |\vec{E}(x)|^2$ sagt mir also eigentlich mit welcher Wahrscheinlichkeit ein γ bei ~~x~~ $[x, x+dx]$ landet

⟹ Allgemein $WF_{mat} = \Psi(x,t)$

~~Wahrsch.~~ $I \sim |\Psi(x,t)|^2$
= Häufigkeitsvert. eines Messwerts x

- Wenn wir uns die **De Broglie – Hypothese** und die **probabilistische Deutung** zu eigen machen, können wir somit uns **Teilchen als Wellenpakete** beschreiben:

$$\boxed{\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \varphi(k) e^{ikx - i\omega t}} \quad \text{mit} \begin{cases} k = \frac{p}{\hbar} \\ \omega = \frac{\hbar k^2}{2m} \end{cases}$$

$$\boxed{|\psi(x,t)|^2 \hat{=} \text{Wahrscheinlichkeitsdichte für Teilchen am Ort } x \text{ zu } t.}$$

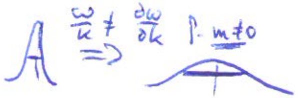
- $|\psi|^2$ hat alle Eigenschaften, die man aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung kennt:

Mittlerer **Messwert** f. x: $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi|^2 dx$

Varianz d. Messung: $\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$

$= \int x^2 |\psi(x,t)| dx - \left(\int x |\psi|^2 dx\right)^2$

$\frac{\omega}{k} \neq \frac{\partial \omega}{\partial k}$ f. $m \neq 0$ $\Rightarrow$



- Haben gesehen: [AB]: $\varphi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x, t=0) e^{-ikx}$ $\underline{\underline{FT!}}$

wegen $k = \frac{p}{\hbar}$ $\to$ $\varphi(k) \hat{=} \varphi(p)$

$\hookrightarrow |\varphi(p)|^2 =$ W. Dichte für ein bestimmtes p
= "WF" ~~...~~ im p-Raum!

wie x $\Rightarrow$
$$\begin{cases} \langle p \rangle = \int p |\varphi(p)|^2 dp \\ \Delta p^2 = \int \ldots - (\int \ldots)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 \end{cases}$$

- In Vorlesung ~~...~~ gezeigt: $\boxed{\text{in Theo 3 wichtig!}}$

$\langle p \rangle = \int dp\, |\varphi(p)|^2 = \int dp\, \varphi^*(p)\, p\, \varphi(p) = \int dx\, \psi^*(x)(-i\hbar \partial_x)\psi(x)$

Folgt aus $\underline{FT}$, $\leftarrow$ Darstellung von p im Raum der x

ebenso: $\boxed{\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}}$ Heisenbergsche Unschärfe-relation $\left(x \tfrac{\hbar^2}{\sigma} \leftrightarrow (k\sigma)^2\right)$

Mathematisch eine Folge davon, dass $\psi(x)$ und $\varphi(p)$ FTs sind! Sichtbar z.B. in 7.3

- Um unsere Erkenntnisse auf konkrete Probleme anwenden zu können, brauchen wir eine **Bestimmungsgleichung** (Bewegungsgleichung) für $\psi(x,t)$ [bzw $\varphi(p)$]. **Da ψ Welle**, wird es eine WGl sein!

- **Anforderungen**:
  1) Soll **1. Ordnungs DGl der Zeit** sein: $\psi_0(x)$ bekannt $\to$ $\psi(x,t)$ bekannt
  2) Soll **linear in $\psi(x,t)$** sein $\to$ Superpositionsprinzip wie WGl. [ψ_1, ψ_2 Lsg $\to$ $a\psi_1 + b\psi_2$ Lsg]
  3) **Ebene Welle soll Lösung sein**:

also: $\psi(x,t) = e^{ikx - i\omega t} = e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$ soll Lösung sein!

- $$\begin{cases} \partial_t \psi(x,t) = -i \frac{E}{\hbar} \psi(x,t) = -i \frac{p^2}{2m\hbar} \psi(x,t) \\ \partial_x^2 \psi(x,t) = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi(x,t) \end{cases} \Rightarrow \underbrace{i\hbar \partial_t \psi(x,t)}_{E_{ges}} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi(x,t)}_{E_{kin}}$$

ist eine DGl, die alle Forderungen erfüllt

- Da $i\hbar \partial_t \psi \hat{=}$ (Gesamt)energie
$-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi = \frac{p^2}{2m} \psi$ kin. Energie: Naheliegende Erweiterung:

$$\boxed{i\hbar \partial_t \psi(x,t) = \underbrace{\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + V(x)\right]}_{= \hat{H} \text{ Hamilton-Operator}} \psi(x,t)}$$

Schrödinger-Gleichung SGl

- Wichtiger **praktischer Schritt**: Wenn $V(x)$ zeitkonstant, kann man SGl durch **Separationsansatz** lösen!

Ansatz: $\psi(x,t) = \psi(x) \cdot f(t)$

$\hookrightarrow$ in SGl: $\underbrace{i\hbar \frac{1}{f(t)} \partial_t f(t)}_{= E} = \underbrace{\frac{1}{\psi(x)} \hat{H} \psi(x)}_{= E}$

(da (l) nur von t und (r) nur von x abh. müssen beide gleich derselben Konstante sein: E)

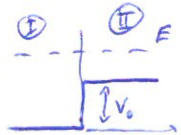
$(\Leftrightarrow)$
$$\begin{cases} (l) & i\hbar \partial_t f(t) = E f(t) \to f(t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \quad \text{(Zeitentwicklung)} \\ (r) & \hat{H} \psi(x) = E \psi(x) \quad \text{"zeitunabh. SGl"} \ \boxed{\text{Eigenwertgleichung}} \end{cases}$$

"E = EW von $\hat{H}$ zum EZ $\psi(x)$"

- D.h. für **zeitkonstante Potentiale $V(x)$** reicht es, EW ~~...~~ und EZ von $\hat{H}$ zu finden
$\hookrightarrow$ die volle Lösung $\underline{\underline{\psi(x,t) = \psi(x) e^{-iEt/\hbar}}}$!

- Anwendbar auf viele Probleme (**1-dim Probleme**)

z.B. Stufe:



$\hat{H}\psi = E\psi$? Ansatz $\begin{cases} \psi_I = e^{ikx} + Re^{-ikx} \\ \psi_{II} = Te^{ik'x} \end{cases}$; $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $k' = \frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar}$ $\leftarrow$ wird Im für $E < V_0$!

SGl muss ... : $\begin{cases} \psi_I(0) = \psi_{II}(0) \\ \ldots \end{cases}$ $(\Leftrightarrow)$ $\begin{cases} 1 + R = T \\ \ldots \end{cases}$ $(\Leftrightarrow)$ $\begin{cases} R = \frac{k' - k}{k + k'} \\ \ldots \end{cases}$